

QP.No. : BB 754

3SCJ

**B.Sc. B.Ed. DEGREE (4 Year Integrated)
EXAMINATIONS, MARCH 2025**

**(For the candidates admitted during the Academic Year
2017-2018 onwards)**

Third Semester

Core Paper VI – REAL ANALYSIS – I

Time : 3 hours

Maximum Marks : 70

PART A — ($10 \times 1 = 10$ marks)

Answer ALL questions.

1. எண்ணிடத்தக்கதற்ற கணம் - வரையறு.
Define uncountable set.
2. அடர்த்தி கணம் - வரையறு.
Define dense set.
3. இரண்டாம் வகையின் உட்கணத்தை வரையறு.
Define second category subset.
4. முழுமையான யாப்பு வெளிக்கு ஒரு உதாரணம் கூறு.
Give an example for complete metric space.
5. தொடர்ச்சியான கணம் வரையறு.
Define connected set.
6. சீரான தொடர்பை வரையறு.
Define uniform continuity.

7. $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ R யில் ஒரு தொடர்ச்சியான உட்கணம் இல்லை என நிறுவுக.

Show that $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ is not a connected subsets of R .

8. கீழ்க்கண்ட கூற்று சரியா தவறதா என்று கூறு.

A என்பது M என்ற யாப்பு வெளியின் இணைப்புடைய உட்கணம் மற்றும் $A \subset B \subset \bar{A}$ எனில் B என்பது இணைப்புடையது.

State whether the following statement is true or false. If A is a connected subset of the metric space M and if $A \subset B \subset \bar{A}$, then B is connected.

9. ஹீன்-போரல் பண்பை யாப்பு வெளியில் கூறுக.

State the Heine-Borel property in a metric space.

10. திறந்த உறை என்றால் என்ன?

What is meant by open covering?

PART B — ($5 \times 4 = 20$ marks)

Answer ALL questions.

11. B என்பது A என்ற எண்ணிடத்தக்க கணத்தின் எல்லையற்ற உட்கணம் எனில் B என்பது எண்ணிடத்தக்கது என நிறுவுக.

Prove that if B is an infinite subset of the countable set A , then B is countable.

12. எந்த ஒரு தனித்த யாப்பு வெளியும் முழுமையானது என நிறுவுக.

Prove that any discrete metric space is complete.

13. ஒரு விகிதமுறா எண்களின் கணம் இரண்டாம் வகையை சார்ந்தது என நிறுவுக.

Prove that the set of all irrationals is of the second category.

14. f என்பது யாப்பு வெளி M_1 லிருந்து யாப்பு வெளி M_2 வரையிலான தொடர்ச்சி சார்பு என்க. M_1 என்பது இணைப்புடையது எனில் f ன் வீச்சு இணைப்புடையது என நிறுவுக.

Prove that if f is a continuous function from a metric space M_1 into a metric space M_2 . If M_1 is connected then the range of f is also connected.

15. யாப்பு வெளி M இறுக்குமானது எனில் M -ல் மூடிய உட்கணங்களின் ஒரு தொகுப்பு $\mathcal{F}$ முடிவுள்ள வெட்டுப்பண்பு கொண்டதாக இருக்கும் போது $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$,

Prove that a metric space M is compact if whenever $\mathcal{F}$ if a family of closed subsets of M with the finite intersection property. Prove that $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.

PART C — ($5 \times 8 = 40$ marks)

Answer any FIVE questions.

16. $[0,1] = \{x / 0 \leq x \leq 1\}$ என்ற கணம் எண்ணிடத்தக்கதற்ற கணம் என நிறுவுக.

Prove that the set $[0,1] = \{x / 0 \leq x \leq 1\}$ is uncountable.

17. $\langle M_1, P_1 \rangle$ மற்றும் $\langle M_2, P_2 \rangle$ என்பது யாப்பு வெளிகள் என்க. $f : M_1 \rightarrow M_2$ என்ற சார்பு தொடர்ச்சியுடையது எனில் மட்டுமே M_2 ல் உள்ள ஒவ்வொரு திறந்த கணம் G க்கும் $f^{-1}(G)$ ஆனது M_1 ல் திறந்த கணமாக இருக்கும் என நிறுவுக.

Let $\langle M_1, P_1 \rangle$ and $\langle M_2, P_2 \rangle$ be metric spaces and let $f : M_1 \rightarrow M_2$ then f is continuous on M_1 if and only if $f^{-1}(G)$ is open in M_1 whenever G is open in M_2 .

18. பிக்கார்டின் நிலைப்புள்ளித் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove Picard fixed-point theorem.

19. R^1 என்ற கணம் இரண்டாம் வகையை சார்ந்தது என நிறுவுக.

Prove that the set R^1 is of the second category.

20. $\langle M_1, P_1 \rangle$ ஒரு இறுக்கமான மீட்டவெளி மற்றும் f ஆனது M_1 -லிருந்து ஒரு மீட்டவெளி $\langle M_2, P_2 \rangle$ ல் அமைந்த தொடர்ச்சியான சார்பு எனில் M_1 ல் f சீராக தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.

If $\langle M_1, P_1 \rangle$ be a compact metric space and f is a continuous function from M_1 into a metric space $\langle M_2, P_2 \rangle$. Prove that f is uniformly continuous on M_1 .

21. M_1 என்ற இறுக்கமான யாப்பு வெளியிலிருந்து M_2 என்ற யாப்பு வெளியின் மேல் f ஆனது தொடர்ச்சியான 1-1 மற்றும் மேல் சார்பாக இருப்பின் f^{-1} - ஆனது M_2 -யின் மீது தொடர்ச்சியான சார்பாகவும் M_2 மேல் M_1 -யின் சம ஒப்புமை சார்பாகவும் இருக்கும் என நிறுவுக.

Prove that if f is 1-1 continuous function from the compact metric space M_1 onto the metric space M_2 then f^{-1} is continuous on M_2 and hence f is a homeomorphism of M_1 onto M_2 .

22. X என்ற யாப்பு வெளியில் $\{A_\alpha\}$ என்பது ஒரு வெறுமையற்ற இணைக்கப்பட்ட உட்வெளிகளின் தொகுப்பு எனில் $\cap A_\alpha \neq \emptyset$ ஆன இருப்பின் $\cup A_\alpha$ இணைக்கப்பட்டது என நிறுவுக.

Let $\{A_\alpha\}$ be a non empty collection of connected subspaces of a metric space X . If $\cap A_\alpha \neq \emptyset$ then prove that $\cup A_\alpha$ is connected.

23. ஹெயின் போரல் பண்பை பெற்றுள்ள யாப்பு வெளி M ஆனது இறுக்கமானது என்று நிறுவுக.

Prove that if the metric space M has the Heine-Borel property then M is compact.