

QP.No. : BB 753

3SCI

**B.Sc. B.Ed. DEGREE (4-Year Integrated)
EXAMINATIONS, MARCH 2025.**

**(For the Candidates admitted during the Academic Year
2017–2018 onwards)**

Third Semester

Core Paper V – GROUPS AND RINGS

Time : 3 hours

Maximum Marks : 70

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL the questions.

1. G ஒரு குலமென்க மற்றும் $a \in G$ என்க. $0(a)$ ஐ வரையறு.

Let G be a group and let $a \in G$. Define $0(a)$.

2. சுழற்சிக் குலம் வரையறு.

Define cyclic group.

3. நேர்மை உட்குலம் வரையறு.

Define normal subgroup.

4. பெர்மாட் தேற்றத்தை எழுதுக.

State Fermat's theorem.

5. பூலியன் வளையம் வரையறு.

Define Boolean ring.

6. பகுவளையத்தை வரையறு.

Define division ring.

7. R -ன் மீப்பெரு சீர்வளையம் வரையறு.

Define a maximal ideal of R .

8. செயல் ஒப்புமையின் உட்கரு வரையறு.

Define Kernel of homomorphism.

9. $1 + 6i$ மற்றும் $5 - 15i$ யின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி காண்க.

Find the greatest common divisor of $1 + 6i$ and $5 - 15i$.

10. யூக்ளிடியன் வளையம் வரையறு.

Define Euclidean ring.

PART B — ($5 \times 4 = 20$ marks)

Answer ALL the questions.

11. H மற்றும் K என்பது G என்ற குலத்தின் உட்குலங்கள் எனில் $H \cap K$ என்பது G -யின் உட்குலம் என நிறுவுக.

If H and K are subgroups of a group G , then prove that $H \cap K$ is also a subgroup of G .

12. லெக்ரான்ஜின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove lagrange's theorem.

13. R ஓர் வளையம் எனில்

(அ) $0a = a0 = 0$

(ஆ) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

If R is ring prove that

(a) $0a = a0 = 0$

(b) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

14. ஒரு எண் அரங்கத்தின் செயல்மாறா பிம்பம் மற்றொரு எண் அரங்கமாக இருக்க தேவையில்லை என நிறுவுக.

Prove that the homomorphic image of an integral domain need to be an integral domain.

15. ஓர் யூக்ளிடியன் வளையம் அலகு உறுப்பை பெற்றுள்ளது என நிறுவுக.

Prove that an Euclidean ring possesses a unit element.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer any FIVE questions.

16. ஒவ்வொரு வரிசைமாற்றமும் அவைகளின் சுழற்ச்சிகளின் பெருக்கம் என நிறுவுக.

Prove that every permutation is the product of its cycles.

17. H மற்றும் K என்பன G யின் முடிவுறு உட்குலமெனில்

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} \text{ என நிறுவுக.}$$

Let H and K be two finite subgroups of a group G then

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$

18. உட்குலத்திற்கான கெய்லியின் தேற்றத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove Cayley's theorem for subgroup.

19. கணம் $\mathcal{R}$ ஆனது $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ என்ற வடிவம் கொண்ட அனைத்து

அணிகளையும் கொண்டுள்ளது எனில் $\mathcal{R}$ ஆனது அணிக் கூட்டல் மற்றும் அணிப் பெருக்கலின் கீழ் வளையம் என நிறுவுக.

Prove that the set $\mathcal{R}$ of all matrices of the form $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

where $a, b \in \mathcal{R}$ is ring under matrix addition and matrix multiplication.

20. ஓர் பூக்ளிடி வகுத்தி இல்லாத முடிவுறு பரிமாற்று வளையம் களம் என நிறுவுக.

Prove that a finite commutative ring R without zero divisors is a field.

21. ஒவ்வொரு எண் அரங்கமும் களத்தினுள் திணிக்க முடியும் என களம் என நிறுவுக.

Prove that every integral domain can be imbedded in a field.

22. R என்பது பூக்ளிடியன் வளையம் மற்றும் $a, b \in R$

(அ) $b \neq 0$ என்பது R -ன் அலகு உறுப்பு இல்லை எனில் $d(a) < d(ab)$ என்றும்

(ஆ) b என்பது R -ன் அலகு உறுப்பு எனில் $d(a) = d(ab)$ என்றும் நிறுவுக.

Let R be a Euclidean ring and $a, b \in R$ then prove that

(a) $b \neq 0$ is not a unit in R then $d(a) < d(ab)$

(b) b is a unit in R then $d(a) = d(ab)$.

23. $\mathcal{R} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ என்ற காசியன் முழு எண்களின் வளையம் அதில் $d(a + ib) = a^2 + b^2$ என்றிருக்க $\mathcal{R}$ ஆனது ஒரு பூக்ளிடியன் வளையம் என நிறுவுக.

Prove that the ring of Gaussian integers $\mathcal{R} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ is an Euclidean domain where we define $d(a + ib) = a^2 + b^2$.