

QP.No. : BB 811

6SCA

**B.Sc.B.Ed. DEGREE EXAMINATION (4-Year Integrated),
JULY 2020.**

**(For the candidates admitted during the Academic Year
2017–2018 onwards)**

Sixth Semester

Core Paper XIV — COMPLEX ANALYSIS

Time : 3 hours

Maximum Marks : 70

PART A — (10 × 1 = 10 marks)

Answer ALL the questions.

1. $w = iz$ என்ற உருமாற்றத்தின் கீழ் $0 < x < 1$ என்ற பட்டைப்பகுதியின் பிம்பம் காண்க.

Find the image of the strip $0 < x < 1$ under the transformation $w = iz$.

2. $w = \bar{z}$ என்ற உருமாற்றம் ஒரு இருகோட்டு உருமாற்றமல்ல என நிரூபி.

Prove that the transformation $w = \bar{z}$ is not a bilinear transformation.

3. $f(z) = |z|^2$ என்ற சார்புக்கு $z = 0$ என்ற புள்ளியில் வகைக்கெழு உள்ளது என நிறுவுக.

Prove that the function $f(z) = |z|^2$ has a derivative at $z = 0$.

4. சுழல்மாறாச் சார்பை வரையறு.

Define the conformal mapping.

5. இயற்கணிதத்தின் அடிப்படை தேற்றத்தை கூறு.

State fundamental theorem of algebra.

6. கோஷியின் தேற்றத்தை கூறு.
State Cauchy's theorem.
7. $\cos z$ ன் மக்லாரின் விரிவைக் காண்க.
Find the Maclaurin's series expansion of $\cos z$.
8. $f(z) = z^2 \sin z$ ன் பூச்சியங்களை காண்க.
Find zeros of $f(z) = z^2 \sin z$.
9. நீக்கத்தக்க ஒருமைப்புள்ளி என்பதனை வரையறு.
Define removable singularity.
10. வீச்சு மதிப்பு தேற்றத்தை கூறு.
State Arguments theorem.

PART B — (5 × 4 = 20 marks)

Answer ALL the questions.

11. எந்த ஒரு இருநேர்கோட்டு உருமாற்றமும் குறுக்கு வீதத்தை பாதுகாக்கும் என நிறுவுக.
Prove that any bilinear transformation preserves cross ratio.
12. $u = 2x - x^3 + 3xy^2$ என்ற சார்பு இரு இசைசார்பு என நிறுவி, அதன் இணை இசைச்சார்பை காண்க.
Prove that $u = 2x - x^3 + 3xy^2$ is harmonic and find its harmonic conjugate.
13. லியோவில்லின் தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.
State and prove Liouville's theorem.

14. $z = 1$ ல் $f(z) = \frac{z-1}{(z+1)}$ என்ற சார்பை டெய்லர் விரிவில் எழுதி, அதன் ஒருங்கும் பகுதியை காண்க.

Expand $f(z) = \frac{z-1}{(z+1)}$ as a Tylor's series about $z = 1$.
Determine the region of convergence.

15. மதிப்பிடுக $\int_C \tan z \, dz$ இங்கு, C என்பது $|z| = 2$.
Evaluate $\int_C \tan z \, dz$, where C is $|z| = 2$.

PART C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer any FIVE questions.

16. (அ) $(-1, 1, \infty)$ என்ற புள்ளிகளை $(-i, -1, i)$ என்ற புள்ளிகளாக மாற்றும் இருநேர்கோட்டு உருமாற்றத்தை காண்க.
(ஆ) $w = \frac{1}{z}$ என்ற உருமாற்றத்தில் $|z - 3i| = 3$ எனும் பகுதியின் பிம்பத்தைக் காண்க.
(a) Find the bilinear transformation which maps the points $(-1, 1, \infty)$ to $(-i, -1, i)$.
(b) Under the transformation $w = \frac{1}{z}$, find the image of $|z - 3i| = 3$.

17. $f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2} & \text{if } z \neq 0 \\ 0 & \text{if } z = 0 \end{cases}$ எனும் சார்பு $z = 0$ என்ற

புள்ளியில் காஷி-ரீமான் சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்கிறது எனவும், இருப்பினும் இச்சார்பை $z = 0$ என்ற புள்ளியில் $f'(0)$ வகையிட முடியாது எனவும் நிறுவுக.

Prove that the function $f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2} & \text{if } z \neq 0 \\ 0 & \text{if } z = 0 \end{cases}$

satisfies the Cauchy-Riemann equation at $z = 0$, but $f'(0)$ does not exist.

18. $u + v = \frac{\sin 2x}{\cosh 2y - \cos 2x}$ எனில், $f(z) = u + iv$ என்ற பகுமுறை சார்பை காண்க.

If $u + v = \frac{\sin 2x}{\cosh 2y - \cos 2x}$, find the analytic function $f(z) = u + iv$.

19. கோஷியின் தொகையிடல் சூத்திரத்தை எழுதி நிறுவுக.

State and prove Cauchy's integral formula.

20. C என்பது $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$ மற்றும் $C(0, 1)$ ஆகியவற்றை புள்ளிகளாக கொண்ட சதுரம் எனில் $\int_C |z|^2 dz = -1 + i$ என காட்டுக.

C is the square with vertices $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$ and $C(0, 1)$ then show that $\int_C |z|^2 dz = -1 + i$.

21. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ என்ற சார்பின் லாரண்ட் விரிவை
(அ) $|z| < 1$; (ஆ) $1 < |z| < 2$ (இ) $|z| > 2$ என்கின்ற பகுதிகளில் காண்க.

Expand $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ in a Laurent's series in
(a) $|z| < 1$; (b) $1 < |z| < 2$ (c) $|z| > 2$.

22. ரோஷியின் தேற்றத்தை கூறி நிறுவுக.

State and prove Rouché's theorem.

23. மதிப்பிடுக $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$.

Evaluate $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$.